This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

+ *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.

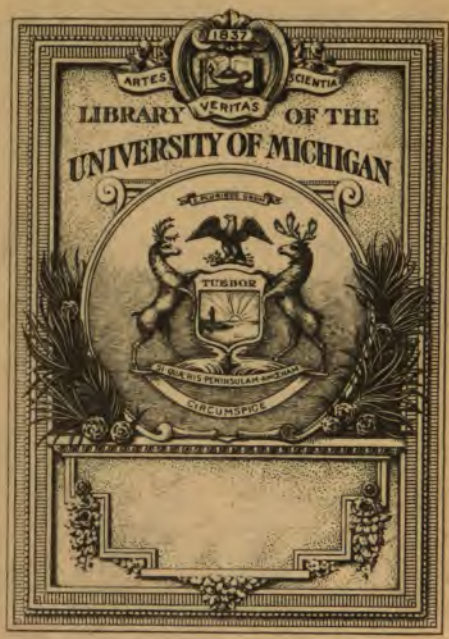
+ *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.

+ *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.

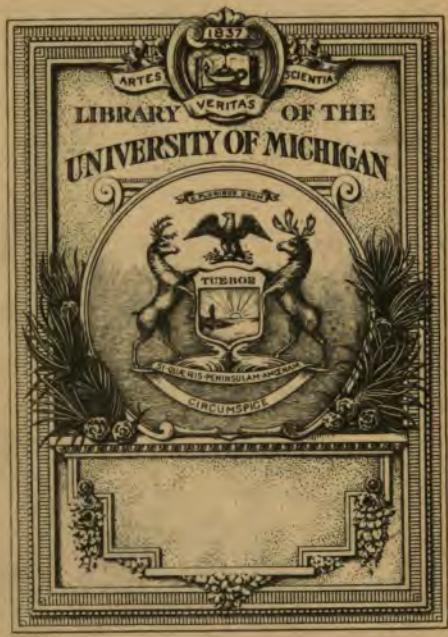
+ *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse `http://books.google.com`


1837
ARTES
SCIENTIA
VERITAS
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR
CIRCUMSPICE

MATHEMATICS,
QA
457
.H458


1837
ARTES
VERITAS
SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR
CIRCUMSPICE

Comenius,
QA
457
.H458

176

MÉMOIRE

SUR

LA SPHÈRE,

par Alph^se. Steegmann

Extrait des Mémoires de la Société des Sciences, de l'Agriculture et des Arts, de Lille.

LILLE,

Imprimerie de L. DANEL, sur la Grande-Place.

1826.

Blanchard
7471
Hist. of Sci.
10-3-1922
gen.

45 1
.H458

MÉMOIRE

SUR

LA SPHÈRE,

AVERTISSEMENT.

Je me suis proposé dans ce mémoire de résoudre plusieurs problèmes sur la sphère, au moyen de constructions faites sur la surface de ce corps, à l'aide du compas et par des procédés semblables à ceux qu'on emploie dans les constructions planes.

Les problèmes ordinaires fournissent le plus souvent des problèmes analogues si l'on remplace les lignes droites par des arcs de grand cercle qui sont, sur la sphère, les *lignes directes* ou les *moindres lignes*.

Le plan pouvant être considéré comme une surface sphérique d'un rayon infini, on prévoit que les résultats obtenus pour la sphère seront applicables au plan, mais cependant avec certaines restrictions. Quelquefois même il arrive qu'envisagé sous ce point de vue plus général,

4082?8

le sujet devient plus facile à traiter, et que les relations cherchées se montrent d'une manière assez sensible pour rendre inutile le secours des figures.

Je donne ces recherches, sans doute peu importantes, comme un exercice utile pour se familiariser avec les propriétés de la sphère, dont l'étude est si négligée dans les élémens de géométrie. Elles m'obligeront souvent, pour éviter des circonlocutions fastidieuses, à introduire des termes nouveaux, ou du moins à étendre la signification de quelques termes anciens. C'est ainsi, par exemple, que j'appellerai simplement *sécantes* et *tangentes* les sécantes et tangentes sphériques, c'est-à-dire formées d'arcs de grand cercle; et que j'appellerai *rayon* l'arc de grand cercle qui joint le pôle d'un cercle à un point de sa circonférence; mais j'aurai soin de n'employer ces abréviations que lorsqu'elles ne pourront pas causer d'équivoque.

THÉORÈMES PRÉLIMINAIRES.

1. *Soit sur la sphère un cercle* ABT (fig. 1, pl. 3) *variable, mais assujetti à passer par deux points fixes* A, B; *si d'un troisième point* Y *pris à volonté sur le même grand cercle que les deux autres, on mène un arc de grand cercle* YT *tangent au cercle variable, cet arc sera d'une grandeur constante.*

Réciproquement si d'un point donné Y *on peut mener à deux cercles qui se coupent, deux tangentes sphériques égales, le point donné sera nécessairement sur le grand cercle* YAB *qui passe par les deux points d'intersection des cercles donnés.*

Tirons la droite OYS par le centre O de la sphère et le point Y. Cette ligne étant dans le plan du grand cercle YAB, rencontrera généralement la droite BAS en un point S.

Or la droite BAS est l'intersection commune des plans de tous les cercles Q, P, etc. qui passent par les deux points A, B; et la tangente ST menée du point S à chacun de ces cercles, ne peut avoir que le point T de commun avec la sphère. Donc cette droite ST est la génératrice d'un cône tangent à la sphère, et qui a son sommet au point S. Donc la suite des points de contact T forme le cercle de contact du cône avec la sphère, et il est visible que le point Y en est le pôle. Mais l'arc de grand cercle YT est tangent au cercle ABT. Donc cet arc est d'une grandeur constante.

La même propriété subsiste lorsque BAS est parallèle à OYS. Dans ce cas la suite des points de contact donne un grand cercle.

Réciproquement si les deux cercles P, Q, ont des tangentes sphériques égales, l'intersection de leurs plans coupera généralement la droite menée par le centre de la sphère et le point de rencontre des tangentes; d'où il suit que le grand cercle qui passe par les deux points d'intersection A, B, des cercles P, Q, doit passer par le point donné.

On doit comprendre dans le même théorème le cas où les deux points A, B, se confondant, les cercles P, Q, etc. touchent tous l'arc YAB en un seul point; et même le cas où ne se coupant ni ne se touchant pas, ces cercles ont cependant une intersection commune située dans le plan du grand cercle YAB.

2. Le cercle formé par la suite des points de contact T, coupe *orthogonalement*, c'est-à-dire à angle droit tous les cercles qui passent par les points A, B; car sa tangente

à chacun des points d'intersection coupe à angle droit la tangente du cercle donné.

Mais le point Y étant indéterminé, il donne naissance à une série de cercles qui ont leurs pôles sur le grand cercle YAB, et qui coupent orthogonalement la série des cercles donnés. Nous allons voir maintenant que les plans de tous les cercles de la nouvelle série passent par l'intersection des plans tangens menés aux points A, B à la sphère.

En effet, soit IKL un de ces cercles, et K un de ses points d'intersection avec un cercle donné ABT; la droite qui touche le cercle IKL au point K, étant perpendiculaire à celle qui touche le cercle ABT, sera la génératrice du cône tangent à la sphère suivant ce cercle ABT. Donc le plan de chaque cercle IKL passe par les sommets de tous les cônes tangens à la sphère suivant les cercles donnés.

Or il est évident que ces cônes ont leurs sommets à l'intersection des plans tangens aux points A, B. D'où l'on peut conclure qu'à une série de cercles dont les plans ont une commune intersection qui traverse la sphère, répond une série orthogonale dont les plans ont une commune intersection placée hors de la sphère; et réciproquement.

Donc, étant donné sur la sphère un petit cercle et un grand cercle extérieur au petit, si chaque point du grand cercle est pris pour pôle d'un cercle qui coupe orthogonalement le petit cercle donné, tous les cercles décrits de cette manière passeront par deux points fixes (1).

(1) Ce théorème, par sa généralité, nous apprend que la propriété qu'il énonce a également lieu pour une figure plane; et en effet, si au sommet de chacun des cônes tangens on conçoit une sphère qui coupe la sphère donnée suivant le cercle de contact du cône, toutes ces sphères se cou-

Si les cercles donnés se touchaient, les cercles décrits se toucheraient également, et au même point que les premiers.

Enfin, si les cercles donnés se coupaient, les cercles décrits ne se couperaient ni ne se toucheraient pas, mais leurs plans auraient néanmoins une intersection commune.

3. *Si un cercle indéterminé coupe ou touche une série de cercles assujettis à passer par deux points fixes, les sécantes et tangentes sphériques communes à deux cercles concourront en un point toujours situé sur la ligne qui joint les deux points fixes* (1).

Les plans de la série donnée ayant une intersection commune, les intersections de ces plans avec celui du cercle sécant passeront toutes par un même point ou seront toutes parallèles, c'est-à-dire qu'elles seront *concourantes;* celles de ces intersections qui pénètrent dans la sphère ou qui la touchent, sont des droites sécantes ou tangentes communes à deux cercles. Donc les sécantes ou tangentes courbes qui leur correspondent sur la sphère

---

peront entr'elles suivant un même cercle dont le plan passera par la droite AB et le centre de la sphère donnée. Les deux points d'intersection de la circonférence de ce cercle avec le plan PQ appartiendront à tout cercle qui coupera le cercle PQ orthogonalement, et dont le centre sera sur la droite qui passe par les sommets des cônes.

Si cette même droite est prise pour axe ou intersection commune d'une série de plans sécans menés à la sphère donnée, les sections obtenues étant rabattues dans un même plan, en tournant autour de l'axe, formeront une série de cercles coupés orthogonalement par une autre série de cercles dont les centres seront sur cet axe. Chacune de ces séries pourra, par analogie, s'appeler concourante; mais si les cercles de la première se coupent, ceux de la seconde ne se coupent pas; et réciproquement.

(1) Cette proposition peut facilement se déduire de la première dont elle n'est véritablement qu'un corollaire, ainsi que les deux suivantes.

sont concourantes en un point toujours situé sur la ligne qui joint les deux points fixes.

On fera ici la même observation qu'au paragraphe 1.er, sur l'extension dont la proposition est susceptible.

4. La tangente courbe YT au cercle P est égale non-seulement à la tangente au cercle Q, qui passe par les points A, B, mais encore à celle de tout cercle R qui coupe le cercle Q en deux points C, D, situés sur un arc de grand cercle passant par le point Y; et ainsi de suite. On voit que dans ce cas le point Y, qui n'est plus indéterminé, correspond à une infinité de cercles dont les plans sont seulement assujettis à passer par un point S. Donc :

Si l'on a une suite de cercles qui se coupent ou se touchent deux à deux, de manière que leurs sécantes ou tangentes communes soient concourantes (ces mots sécante et tangente désignant des arcs de grands cercles), toutes les tangentes menées du point de concours aux cercles donnés seront égales.

5. *Les mêmes choses étant posées que dans le corollaire précédent, les deux points d'intersection* C, D, *d'une sécante seront toujours sur une même circonférence de cercle avec les deux points* E, F, *d'une autre sécante.*

Réciproquement si par deux points d'intersection d'une sécante on fait passer un cercle qui coupe un autre cercle de la suite donnée, la sécante commune sera concourante avec toutes les sécantes ou tangentes données.

Car les droites CD, EF sont dans un même plan passant par le sommet du cône.

Si au lieu de deux sécantes, on prenait une sécante YF et une tangente YT, le cercle mené par les deux points d'intersection de la sécante et le point de contact de la tangente, aurait cette tangente commune. Enfin, si l'on

prenait deux tangentes, il serait toujours possible de mener, par les deux points de contact, un cercle auquel ces tangentes seraient communes.

6. *Étant donné sur la sphère un petit cercle et un grand cercle quelconques, si après avoir mené d'un point du grand cercle deux tangentes au petit, on conçoit que ce point se meuve le long du grand cercle et entraîne avec lui les deux tangentes sans qu'elles cessent de toucher le petit cercle : les deux points de contact changeront de position, mais le grand cercle qui les joint passera toujours par un même point.*

Réciproquement si l'on a une suite de cordes qui se coupent en un même point, les deux tangentes menées aux extrémités de chacune des cordes auront leur point de rencontre placé constamment sur le même grand cercle.

Le point de concours et le grand cercle sur lequel se rencontrent les tangentes s'appelleront point et ligne conjugués (1).

Ce théorème dépend du théorème analogue de Monge, que nous allons démontrer (2).

Supposons d'abord un cercle, et une droite extérieure à ce cercle, mais placée dans le même plan, comme seraient le grand cercle PQ et la droite d'intersection des plans tangens en A, B, à la sphère. Si chaque point de cette droite est considéré comme le sommet d'un cône droit tangent à la sphère, nous savons (§. 2) que les cercles de contact passeront par les deux points A, B. Donc leurs plans auront pour intersection commune la droite AB.

---

(1) Lorsqu'il s'agit d'une figure plane, on les appelle ordinairement pôle et pôlaire. Nous rejeterons ces dénominations pour conserver au mot pôle la signification qu'il a dans les élémens.

(2) Monge a étendu ce dernier théorème à toutes les sections coniques. *Géom. Descrip.* §. 39 et suiv.

sur une même ligne droite. Donc les tangentes courbes correspondantes auront leur point de rencontre constamment placé sur un même grand cercle de la sphère, et la correspondance de la figure sphérique avec celle du plan sécant fait voir que sur la sphère comme dans le plan, si le point de concours des cordes est à l'intérieur du cercle, la ligne conjuguée est à l'extérieur; que si le point de concours est sur la circonférence du cercle, la ligne conjuguée est tangente au cercle en ce point; et qu'enfin, si le point de concours est à l'extérieur du cercle, la ligne conjuguée traverse le cercle et passe par les points de contact des deux tangentes menées du point de concours.

7. S et QL (*fig.* 2) étant conjugués par rapport au cercle ABDC, le point de rencontre Q de chaque paire de tangentes TQ, UQ, est lui-même le point conjugué d'une ligne UTS qui passe par le premier point conjugué. Il y a plus, le point R de rencontre de ces deux lignes conjuguées est lui-même le point conjugué de la ligne qui passe par les deux premiers points S, Q.

Ainsi ces trois points S, Q, L, ont entr'eux cette relation que chacun d'eux a pour ligne conjuguée celle qui passe par les deux autres, ce qui indique qu'il y en a toujours un intérieur et deux extérieurs au cercle donné.

8. Les cercles orthogonaux dont S et Q sont les pôles se coupent eux-mêmes à angle droit; car la tangente SV menée à l'un de ces cercles au point V de leur intersection et la sécante STU commune à ce cercle et au cercle donné, se rencontrent en un point qui est le pôle d'un cercle orthogonal passant par le point V.

9. *Si par le sommet* S (fig. 3) *d'un cône oblique et par le centre du cercle* AB *qui en est la base, on mène un plan* SAB *perpendiculaire à cette base, toute section* PCD *perpendiculaire*

Cela posé, il est évident que le plan du grand cercle PQ coupe chacun des cônes suivant deux droites tangentes à ce grand cercle, et qu'il coupe les plans des cercles de contact suivant des droites qui passent toutes par un même point.

Ainsi, à la série des paires de tangentes qui se coupent sur la droite donnée, correspond une série de cordes de contact qui passent par un point fixe situé à l'intérieur du cercle donné.

Pour le cas où le cercle et la droite donnés se coupent comme YAB et SAB, nous concevrons une série de cônes tangens dont les sommets soient sur la droite SAB. Nous avons vu (§. 2) que les plans des cercles de contact IKL etc. passeront par l'intersection des plans tangens aux points A, B.

Donc le plan du grand cercle YAB coupera chacun des cônes suivant deux droites tangentes à ce grand cercle, et il coupera les plans des cercles de contact suivant une série de cordes concourantes avec les tangentes menées aux points A, B.

Enfin, le cas où le cercle et la droite donnés se touchent ne présente aucune difficulté.

Par ces considérations on arrive à la démonstration complète du théorème de Monge.

Maintenant supposons que les deux points A, B, soient diamétralement opposés : tous les cercles passant par ces deux points deviendront des grands cercles. Tout cercle sécant oblique déterminera une calotte sphérique sur laquelle il y aura une suite de grands cercles concourans. De plus il coupera les plans des grands cercles suivant une série de droites concourantes, et les deux tangentes menées dans le plan sécant aux extrémités de chacune de ces droites auront constamment leur point de rencontre

au dernier plan et faisant avec le plus grand et avec le plus petit côté du cône des angles SDC, SCD, *réciproquement égaux à ceux de la base* SBA, SAB, *s'appelle section* ANTIPARALLÈLE *ou* SOUS-CONTRAIRE. *Cette section est toujours un cercle.*

Réciproquement il n'y a que les sections parallèles et les sections antiparallèles qui soient des cercles (1).

Si par un point O pris à volonté sur l'intersection des plans SAB, PCD, on conçoit un plan A'B' parallèle à la base AB, il est évident qu'il coupera le cône suivant un cercle, et que l'ordonnée PO perpendiculaire au diamètre A'B' sera moyenne proportionnelle entre A'O et B'O.

Mais cette ordonnée est commune aux sections CD et A'B'. De plus, à cause de l'égalité des angles SCD, SB'A', on a : B'O : OD :: OC : OA'. Donc OP est aussi moyenne proportionnelle entre OD et OC. De plus, elle est perpendiculaire sur CD. Donc la section CD est un cercle.

Réciproquement si la section circulaire CD n'est pas parallèle à la base, elle est antiparallèle. En effet, soit QR l'intersection du plan CD avec la base AB du cône, menons au cercle AB les tangentes BL, AK, parallèles à l'intersection QR, il est clair que la droite BAQ, tirée par les points de contact, passera par le centre du cercle AB et sera perpendiculaire aux tangentes et à la droite QR. Les plans SAK, SBL passant par le sommet du cône et chacune des deux tangentes seront tangens au cône, et par conséquent leurs intersections CM, DN, avec le plan CD seront tangentes au cercle CD et parallèles à la droite QR. Donc puisque l'on suppose que la section CD est un cercle, il faut que la droite DCQ soit perpendiculaire à RQ.

---

(1) Ce théorème ne se trouve ordinairement que dans les traités des sections coniques.

Or les droites BAQ, DCQ, sont dans un même plan. Donc les cercles AB, CD, sont perpendiculaires à un même plan SBA qui passe par leurs centres et par le sommet du cône.

Maintenant il est facile de prouver que l'angle SCD = SBA, car OP étant moyenne proportionnelle entre B'O et OA', de même qu'entre OD et OC, on doit avoir B'O : OD :: OC : OA'. Donc la section CD est antiparallèle.

La même propriété a lieu pour le cylindre oblique, et se démontre de la même manière.

10. *Par une section parallèle et une section antiparallèle d'un cône ou d'un cylindre oblique, on peut toujours faire passer une sphère.*

Réciproquement, par deux cercles placés sur la surface d'une sphère, on peut toujours faire passer un cône ou un cylindre généralement obliques.

Car d'abord les deux sections circulaires CD, AB (*fig.* 2), devant être perpendiculaires à un même plan SAB passant par leurs centres, et faire avec les côtés SA, SB, des angles SCD, SDC, égaux aux angles SBA, SAB; le quadrilatère ABDC sera inscriptible, et les cercles AB, CD, seront sur la sphère dont le grand cercle passe par les quatre points A, B, C, D.

Réciproquement soit ABDC une section passant par le centre de la sphère et les centres des plans des cercles proposés, et soient AB, CD, les diamètres de ces cercles déterminés par la section ABDC; les plans AB, CD, des mêmes cercles seront perpendiculaires au plan sécant ABDC.

Cela posé, si l'on tire les droites AC, BD, elles se couperont généralement en un point S qui pourra être considéré comme le sommet d'un cône ayant pour base le cercle AB, et passant par les points C, D. Mais l'angle DCS = ABS. Donc la section CD faite dans le cône par un

plan perpendiculaire au plan ABDC sera un cercle ayant CD pour diamètre. Donc il se confondra avec le cercle CD de la sphère.

Si les droites AC, BD, sont parallèles, ce qui arrivera lorsque les cordes BA, DC, seront égales, le cône se changera en un cylindre.

Il y a un autre cône qui coupe la sphère suivant les mêmes cercles AB, CD. Son sommet se trouve à l'intersection R des diagonales BC, AD, et dans l'intérieur de la sphère lorsque les cordes AB, CD ne se croisent pas. Il est composé de deux nappes ou parties opposées au sommet, dont chacune coupe la sphère suivant l'un des deux cercles AB, CD.

Lorsque les cercles se coupent et que par conséquent les cordes qui les représentent se croisent, comme BC, AD, les propriétés du premier cône ne changent pas, mais le second se trouve avoir, comme le premier, son sommet à l'extérieur de la sphère.

Lorsque ce sont deux grands cercles, les deux cônes se changent en deux cylindres toujours obliques : les cônes droits et les cylindres droits répondant à des cercles parallèles.

Lorsque les cercles se touchent et que par suite les cordes qui les représentent se joignent par une de leurs extrémités comme CD, CB, il n'y a qu'un cône de possible, et le sommet de ce cône se trouve au point S′ de rencontre de la tangente menée au point C où les cordes se joignent et de la sécante BD passant par les extrémités écartées des mêmes cordes. Ce théorème fournit une nouvelle réciproque qui est également vraie ; *Tout cône dont la base est un cercle de la sphère ne peut couper cette sphère que suivant un cercle.*

11. Si l'on fait passer une sphère par le sommet du

cône et la circonférence de sa base, le plan mené par le sommet tangentiellement à la sphère sera dirigé dans le sens des sections anti-parallèles ; car il fera avec le plus grand et avec le plus petit côté du cône des angles réciproquement égaux à ceux de la base, comme étant mesurés par des arcs réciproquement égaux. Donc :

Si l'on conçoit autant de cônes que l'on voudra, qui aient pour bases des cercles placés sur une sphère, et pour sommet commun un point de la même sphère, tout plan parallèle au plan tangent en ce point coupera tous les cônes suivant des cercles.

12. *Soient donnés sur la sphère deux cercles fixes* A, B (fig. 4), *et un cercle* X *variable, mais constamment tangent aux deux premiers ; si par les points de contact* V, U, *relatifs à chaque position du cercle tangent, on fait passer un grand cercle* FVU, *chacun des grands cercles ainsi décrits, et que nous appellerons sécante isogonale ou équiangle des deux cercles fixes, jouira de la propriété de couper ces deux cercles sous des angles égaux et de passer par deux points fixes ou foyers situés sur le grand cercle qui joint les pôles des cercles fixes.*

D'abord il est évident que tout plan tangent au cône qui passe par les deux cercles fixes coupe la sphère suivant un cercle tangent aux cercles fixes ; et il est facile de démontrer, par une réduction à l'absurde, que, réciproquement, le plan de tout cercle tangent aux deux cercles est lui-même tangent au cône dont nous venons de parler. Mais en voici une démonstration directe :

Les deux cercles B, X, ont pour tangente commune YV intersection de leurs plans, puisque ces plans sont perpendiculaires à celui qui passe par le centre O de la sphère et par les pôles B, X. De même les cercles A, X, ont la droite YU pour tangente commune.

Or le plan de X, contenant YV et YU tangentes aux cercles A, B, sera lui-même tangent au cône dont ces cercles sont les sections. Donc la droite de contact UV est la génératrice de ce cône et passe par le point S qui en est le sommet. Mais ce que nous venons de prouver pour les points V, U, s'applique également à toutes les paires de points de contact. Donc le sommet S du cône est le point de concours de toutes les droites menées par les deux points de contact du cercle variable dans chacune de ses positions.

Maintenant si par le centre O de la sphère et chacune des droites SVU on fait passer des plans, ces plans se couperont tous suivant le même axe OFS déterminé par le centre de la sphère et le sommet du cône, et ils couperont la sphère suivant une série de grands cercles ou méridiens passant tous par les deux points F, F', d'intersection de l'axe et de la sphère.

Q, V, et U, R, étant les points d'intersection d'un de ces méridiens FVU avec les deux cercles fixes A, B, on a

$$\text{Angle FVB} = \text{XVU} = \text{XUV} = \text{AUR} = \text{ARU}.$$

$$\text{Donc FVB} = \text{FRA}, \text{ et FQB} = \text{FUA}.$$

Réciproquement tout grand cercle FVR qui fait deux angles égaux ARF, BVF ou BQF, AUF appartient à la série en question, car on a de suite :

$$\text{Angle XVU} = \text{XUV ou X'QR} = \text{X'RQ};$$

ce qui prouve que T et U ou Q et R sont deux points de contact correspondans.

A cause de cette propriété des sécantes courbes FVU, nous leur donnerons le nom de *sécantes isogonales* ou *équiangles* des deux cercles A, B, et nous appellerons leur point de concours F ou F' foyer *des sécantes isogonales*

ou simplement foyer de ces deux cercles (1). Ces sécantes coupent les deux cercles à angles égaux, puisqu'elles font des angles égaux avec les tangentes aux points d'intersection.

Nous n'avons parlé jusqu'ici que du cône dont le sommet est toujours situé à l'extérieur de la sphère. L'autre jouit de propriétés semblables. Il donne un foyer que nous appellerons *interne* par opposition à l'autre que nous appellerons *externe*, et il est relatif au cercle variable qui toucherait un des cercles fixes *intérieurement* et l'autre *extérieurement*. Les plans tangens menés du centre de la sphère à ces deux cônes donnent les *doubles tangentes* des deux cercles fixes. Ainsi il y en a généralement quatre : deux *unilatérales*, c'est-à-dire, touchant les deux cercles du même côté, et deux *alternes*, c'est-à-dire, touchant les deux cercles par un côté différent. Cependant il y a des cas où ce nombre est réduit ; et en effet, il est évident

(1) Les triangles VFB, RFA, ayant l'angle VFA commun et les angles FVB, FRA, égaux, donnent :

Sin VFB : sin FVB ou FRA :: sin VB : sin FB :: sin RA : sin FA.

Cette propriété est commune aux deux points F, F' ; et on peut s'assurer qu'ils sont les seuls qui en jouissent ; car dès que nous supposons qu'un point F donne sin FB : sin FA :: sin BK : sin AI, tirant FR quelconque et faisant l'angle FVB = FRA, nous aurons également :

Sin FB : sin FA :: sin BV : sin AR ;

or sin AR = sin AI par supposition ; donc sin BV = sin BK.

Lorsque je déposai ce Mémoire à la Société, je n'avais pas connaissance de l'intéressant ouvrage de M. Poncelet, sur les *propriétés projectives des figures*, où il s'occupe des propriétés semblables de deux cercles placés sur un plan. Il donne au foyer le nom de *centre de similitude*. J'ai conservé celui de foyer des sécantes isogonales comme plus caractéristique, du moins dans le cas présent où les angles FBQ et FAU, QBV et UAR, VBK et RAF', sont généralement inégaux, ce qui fait que les parties interceptées des cercles A, B, sont dissemblables. Lorsque les cercles sont dans un même plan, la proportion ci-dessus, entre les sinus, existe entre les lignes elles-mêmes et suffit pour démontrer le théorème.

qu'il n'y a de doubles tangentes que lorsque le centre de la sphère se trouve à l'extérieur du cône.

Lorsque les deux cercles se coupent, ils n'ont au plus que les deux tangentes dont le contact est unilatéral, le contact alterne n'étant pas possible. On voit d'ailleurs que, les deux cônes ayant leurs sommets hors de la sphère, le centre de la sphère se trouve renfermé au moins dans l'une des deux surfaces coniques.

Lorsque les deux cercles se touchent extérieurement, les tangentes alternes se confondent.

Lorsque les deux cercles se touchent intérieurement, il n'y a qu'une seule tangente.

Enfin il n'y en a aucune dans les trois cas suivans: 1.° si l'un des cercles est un grand cercle de la sphère; 2.° si le premier renferme le second; 3.° s'il renferme le cercle égal et diamétralement opposé au second. Car toute tangente au plus petit cercle est tangente au cercle égal et diamétralement opposé.

13. *Les quatre points de contact donnés par deux positions du cercle variable tangent à deux cercles fixes sont toujours sur une même circonférence de cercle, et réciproquement tout cercle mené par deux points de contact correspondans coupe toujours les deux cercles fixes en deux autres points de contact correspondans.*

On s'en assurera sans peine en considérant que les quatre points de contact sont sur deux droites appartenant à un même cône, et par conséquent situées dans un même plan.

14. Nous pouvons conclure de là que :

La suite des cercles tangens à deux cercles fixes jouit de cette propriété, que les sécantes communes à deux cercles tangens pris à volonté sont concourantes, et que les tangentes menées du point de concours à ces divers cercles tangens sont toutes égales.

15. *Les tangentes menées aux deux points du contact* C, D (fig. 5), *du cercle variable, tangent à deux cercles fixes* O, P, *ont leur point de rencontre* Y, Y', Y'', etc. *constamment placé sur un arc de grand cercle perpendiculaire à celui qui joint les pôles des cercles fixes.*

Les deux droites tangentes communes du cercle variable et de chacun des cercles fixes concourent évidemment, avec l'intersection des plans des cercles fixes. Donc les tangentes courbes correspondantes se coupent toujours sur le grand cercle dont le plan passe par l'intersection (§ 7), de ceux des cercles fixes.

16. *Si du point* Y ou Y', etc., *comme pôle, on décrit un cercle qui passe par les points de contact correspondans, tous les cercles ainsi décrits auront leurs plans concourans.*

17. *Le foyer des sécantes isogonales de deux quelconques des cercles tangens à deux cercles fixes se trouve constamment sur la même ligne dont nous avons parlé au* § 15 (1).

Le cône passant par les deux cercles tangens a constamment son sommet sur la droite d'intersection des plans des cercles fixes. Donc le foyer des sécantes isogonales est constamment sur le grand cercle dont le plan passe par cette intersection.

(1) Cette propriété et celle du § 15 sont indiquées pour le plan dans les développemens de géométrie de M. Dupin, planche 9, fig. 9. Voici une démonstration pour ce cas particulier : Supposons que le plan du cercle P soit rabattu dans le plan du cercle O, en tournant autour de leur intersection prise pour axe. Les droites tangentes aux points C, D, ou C', D', etc., ne cesseront pas de se couper sur cet axe; de même que les droites CC'', DD''. De plus, l'égalité des tangentes prouve que les cercles O, P, pourront encore être touchés aux points C, D, ou C', D', etc., par un cercle variable. Mais par cela même les droites DD'', CC'' seront des sécantes isogonales des deux cercles tangens CD, C'D. Donc ces cercles auront leur foyer sur le même axe.

18. Le plan du cercle tangent à trois cercles de la sphère est tangent à trois cônes qui passent par ces cercles pris deux à deux, et réciproquement.

Cela posé, trois cercles pris deux à deux forment trois combinaisons, à chacune desquelles répondent deux cônes. Du sommet d'un des cônes de la première combinaison on peut généralement mener deux plans tangens à un des cônes de la seconde combinaison. Il est évident que ces plans seront tangens non-seulement aux deux cônes, mais encore à un troisième cône appartenant à la dernière combinaison. Donc l'intersection de ces deux plans passe généralement par les sommets des trois cônes.

Mais nous allons voir que les sommets des six cônes sont dans un même plan. En effet, nous savons déjà que les deux premiers cônes déterminent le troisième. Or les deux cônes de la première combinaison et les deux cônes de la seconde se combinent ici de quatre manières différentes.

Donc les sommets des six cônes sont généralement situés trois à trois sur quatre droites; chaque sommet appartenant à deux droites différentes. Donc ces quatre droites se coupent réciproquement et par conséquent sont situées dans un même plan.

Il suit de là qu'on peut mener généralement huit cercles tangens à trois cercles fixes, puisque chacune des quatre droites répond à deux des plans tangens dont nous avons parlé.

Il suit encore de là que les foyers isogonaux des trois cercles pris deux à deux, sont placés trois à trois sur quatre grands cercles.

19. *Étant donnés sur la sphère un quadrilatère inscrit* ABDC (fig. 2) *et le quadrilatère* NAOBLDMCN *circonscrit aux sommets du premier :*

1.° *Chaque diagonale du quadrilatère circonscrit étant prolongée passera par le point de rencontre des prolongemens des deux côtés de l'inscrit, qui ne sont pas coupés par cette diagonale.*

2.° *Les quatre diagonales se rencontreront en un même point* R.

3.° *Les quatre points de rencontre* S, K, Q, L, *des côtés opposés des demi quadrilatères seront en ligne directe* (1).

---

(1) Le théorème analogue, généralisé pour toutes les sections coniques, est attribué à Pascal; il peut servir à démontrer que *deux cônes droits tangens à la sphère se coupent toujours suivant une courbe plane*: ce qui n'est qu'un cas particulier du beau théorème de Monge sur deux surfaces du second degré touchant une troisième surface du second degré.

Soient CD et AB les diamètres de deux cercles de la sphère et soit ABDC le grand cercle circonscrit à ces diamètres; les tangentes OB = OA et MC = MD seront les génératrices des cônes tangens, suivant les cercles AB, CD.

Or si nous faisons tourner le plan sécant autour de la droite SMRO comme axe, chaque position de ce plan déterminera dans les cônes tangens, suivant les cercles A, B, et le cône passant par A et B, la figure d'un quadrilatère inscrit et d'un quadrilatère circonscrit aux sommets du premier. Donc le point N sera constamment sur la droite mobile RQ.

Mais dans le mouvement du plan sécant, le point R est fixe et la droite RQ est assujettie à passer par l'intersection des cercles AB, CD. Donc chaque point N de l'intersection des cônes droits est constamment dans un même plan perpendiculaire en QL au plan du tableau.

Nous pouvons conclure de là que *les pôles des cercles tangens à deux cercles fixes sont placés à l'intersection de la sphère et d'un cône généralement oblique, dont le sommet est au centre de la sphère.* Car chaque point N de l'intersection des deux cônes tangens à la sphère suivant les deux cercles fixes peut être considéré comme le sommet d'un cône droit tangent à la sphère, et dont le cercle de contact est tangent aux deux cercles fixes.

On peut prouver encore que le plan qui passe par les sommets de trois cônes droits tangens à la sphère contient les sommets des cônes passant par les trois cercles de contact pris deux à deux.

Les lignes MC, MD, étant égales ainsi que les lignes OA, OB; et les angles MCS, OAS, étant évidemment supplémentaires, ainsi que les angles SDM, SBO; si l'on conçoit les cercles des rayons MC, OA, les lignes SCA, SDB, seront deux sécantes isogonales de ces cercles. Donc leur point de concours S est sur la ligne MO. Mais CB, AD, sont aussi des sécantes isogonales des mêmes cercles. Donc les quatre points S, M, R, O sont en ligne directe.

La même démonstration s'applique aux quatre points Q, N, R, L.

Donc le point R est sur les quatre diagonales MO, NL, AD, CB.

De plus QL étant la ligne conjugée du point S, et SO, la ligne conjuguée du point Q, réciproquement SQ sera la ligne conjuguée du point R (§ 6). Donc les points G, H de rencontre des côtés opposés du quadrilatère circonscrit se trouveront sur la ligne SQ.

20. Les considérations précédentes nous conduisent à cette autre propriété du cercle :

Un cercle ACDB *et un point* Q *étant donnés sur une surface sphérique, si de ce point* Q *on mène au cercle donné deux sécantes à volonté* QCD, QAB, *le point de rencontre* S *des deux cordes tirées par les points d'intersection homologues des sécantes, et le point de rencontre* R *des deux cordes tirées par les points d'intersection combinés de la manière inverse, seront constamment sur un même grand cercle fixe* TU.

21. L'angle d'intersection de deux courbes est naturellement mesuré par celui des tangentes de ces courbes au point d'intersection. Nous pourrons encore, lorsqu'il s'agira de cercles placés sur la sphère, prendre celui des rayons courbes menés au point d'intersection. Par ce moyen il nous sera facile de distinguer quel est des deux

angles supplémentaires ; formés par les tangentes, celui qu'on doit regarder comme la mesure véritable. Ainsi le cercle tangent à un autre cercle le coupe sous un angle nul si le contact est intérieur ; et sous un angle égal à deux droits si le contact est intérieur.

Cela posé, on voit d'abord que si deux cercles de la sphère sont coupés par un même cercle dont le plan passe par le sommet du cône déterminé par les deux premiers, ils seront coupés sous le même angle. Nous appellerons ce cercle sécant, cercle *isogonal*, relativement aux deux autres. Réciproquement, si un cercle en coupe deux autres sous des angles égaux, son plan passe par le sommet du cône dont ces deux derniers cercles sont les sections.

22. Soient deux cônes ayant un sommet commun et leurs bases placées sur une sphère, je dis que l'angle d'intersection des bases sera égal à celui des sections antiparallèles placées sur la même sphère. En effet, les quatre points d'intersection étant sur les deux génératrices communes aux deux cônes, chaque droite tangente à l'une des bases en un point d'intersection, et chaque tangente homologue du cercle antiparallèle, seront dans un même plan tangent au cône correspondant. Donc ces deux tangentes sont également inclinées sur la génératrice. Donc l'angle des tangentes ou des circonférences des bases est égal à l'angle des tangentes ou des circonférences des sections antiparallèles.

Réciproquement, si les deux cercles du premier cône sont coupés sous des angles égaux par les deux cercles du second, et si, de plus, les quatre points d'intersection sont placés deux à deux sur une sécante isogonale des deux premiers cercles, les deux cônes auront le même sommet ; car il est facile de prouver que les

quatre points d'intersection seront sur deux droites communes aux deux cônes. (*Voyez* fig. 4.)

23. Si le sommet commun aux deux cônes est placé sur la sphère, l'angle d'intersection des bases sera toujours égal à celui des tangentes antiparallèles menées cette fois au sommet commun des cônes ; et quel que soit le nombre des cônes, il est évident que ces tangentes seront toutes dans un même plan tangent en ce point à la sphère. Or nous avons vu (§ 11) que tout plan parallèle à celui-ci coupait ces cônes suivant des cercles ; les intersections de ces cercles seront mesurées par des tangentes parallèles à celles que nous supposons menées au sommet des cônes. Donc :

Si plusieurs cônes ont leurs bases placées sur une sphère et leurs sommets en un même point de cette sphère, tout plan parallèle au plan tangent à la sphère en ce point coupera ces cônes suivant des cercles qui se couperont entre eux sous les mêmes angles que les cercles correspondans placés sur la sphère (1).

24. *Le cercle variable qui coupe trois cercles fixes sous des angles égaux, mais variables simultanément, a son plan constamment concourant avec lui-même.*

Car (§ 21) il passe généralement par une droite fixe, qui joint les sommets des trois cônes dont les trois cercles fixes, pris deux à deux, sont des sections.

(1) Ce que nous venons de prouver pour des cônes à base circulaire a lieu pour des cônes dont les bases sont des lignes quelconques tracées sur la sphère ; l'angle de leurs tangentes étant toujours égal à celui des tangentes correspondantes placées dans la section antiparallèle. Cette propriété et celle du § 11 ont donné lieu à la *projection stéréographique* employée dès le temps de Ptolémée. Dans cette projection perspective le *point de vue* est placé au sommet commun des cônes, et le *tableau* est un plan antiparallèle.

Voyez *l'introduction à la géographie, par M. Lacroix.*

Les deux plans tangens à ces trois cônes donnent les deux cercles tangens qui sont les limites du cercle variable isogonal. Ainsi ces deux cercles tangens et le cercle variable ont leurs plans concourans.

25. D'après ce qui précède, il est clair que si les cercles donnés, que nous avons appelés fixes, varient tour à tour, pendant que les cercles tangens et le cercle isogonal restent fixes, ce cercle isogonal coupera toujours, sous le même angle, les trois cercles donnés, et réciproquement sera coupé par eux sous un angle constant.

De là résulte ce théorème qui nous sera fort utile plus tard (1).

Le cercle variable qui coupe deux cercles fixes, chacun sous un angle constant, est assujetti généralement à toucher deux autres cercles fixes dont les plans sont concourans avec ceux des deux premiers.

26. Si l'on se rappelle ce qui a été dit au § 22 sur deux cônes qui se coupent et qui ont un sommet commun, on en conclura facilement que *lorsque deux cercles variables qui se coupent sont assujettis chacun à toucher deux cercles d'une suite concourante donnée, si on les fait varier de manière qu'un de leurs points d'intersection parcoure un cercle de la suite donnée, le second point d'intersection parcourra également un cercle de la même suite.*

La condition pour que les deux points d'intersection parcourent un cercle unique, est que les points de contact des deux cercles variables avec les cercles donnés appartiennent à un même cercle orthogonal.

27. *Si trois cercles se coupent réciproquement à angle droit, la sécante commune à deux quelconques de ces cercles*

(1) Cette démonstration s'applique facilement au cas où les cercles seraient sur un plan.

passe par le pôle du troisième ; car le pôle de ce troisième cercle est tellement placé qu'on peut mener de ce point aux deux premiers cercles des tangentes égales (§ 1).

28. Avant de terminer cette partie du mémoire, je donnerai une seconde démonstration du théorème contenu au paragraphe 25. Quoique moins simple que l'autre, elle est propre à faire connaître le parti qu'on peut tirer des projections stéréographiques dont il a été question plus haut (23 et 11).

Supposons d'abord que les cercles donnés ne se coupent ni ne se touchent, soient AB, CD (*fig.* 2), leurs diamètres inscrits à un grand cercle de la sphère, l'intersection des plans AB, CD, sera perpendiculaire en Q au plan ABDC. Menons du point Q les tangentes QT, QU, au grand cercle ABDC. TU passant par les points de contact sera la ligne conjuguée du point Q (§ 6).

Or si nous concevons que le point T soit le *point de vue*, c'est-à-dire, le sommet commun d'une série de cônes ayant pour bases des cercles concourans AB, CD, IK, etc., placés sur la sphère ; nous savons déjà que tous ces cônes seront coupés, suivant des cercles, par un plan quelconque parallèle au plan tangent en T à la sphère (§ 11) ; mais nous allons voir que ces cercles, que l'on appelle les *projections* des premiers, seront concentriques. En effet, aux points I, K, menons les tangentes IP, KP. Elles se rencontreront généralement en un point F de la ligne conjuguée TU. Par le point P concevons le plan I'K', parallèle au plan QT, et soient I', K', les points d'intersection des droites TI, TK, avec ce plan, nous aurons :

$$\text{Angle } KTQ = KK'P \text{ et } PI' = ITQ = PI'I.$$

Donc $PK' = PK = PI = PI'$. Donc la projection I'K' du cercle IK a son centre sur la droite conjuguée TU. On

prouverait la même chose pour toutes les projections des divers cercles concourans AB, CD, etc. Donc ces projections sont concentriques.

Cela posé, soit un cercle variable tangent aux deux cercles BA, CD, mais sécant à l'égard du cercle IK; sa projection sur le plan I'K' sera tangente aux projections des cercles AB, CD, et coupera la projection du cercle IK sous un angle égal à celui des cercles correspondans de la sphère (§ 23), comme le représente la figure 6, où x désigne la projection du cercle variable, les points i, i', les projections de ses deux points de contact, c, a, les projections de deux points d'intersection du cercle variable avec les deux cercles donnés, et la projection de tous les points de la ligne TU (1). Il est visible que dans la projection le cercle variable, constamment tangent à deux des cercles fixes, coupe sous des angles constans tous les autres cercles de la même série, et que réciproquement le cercle variable qui coupe sous des angles constans deux de ces cercles est tangent à deux autres cercles de la même série. Donc la même chose a lieu sur la sphère.

---

(1) Les angles tcx, ycx mesurent l'intersection des cercles a, c, coupés par le cercle variable. Si nous tirons la droite ta qui coupe le cercle variable en a'; le cercle a' de la série sera coupé sous le même angle que le cercle a; et si par le point c on fait passer un cercle z tangent aux cercles a, a', il coupera le second cercle donné c sous un angle tcz, déterminé par les proportions suivantes :

$$ii' : cc' :: R : \cos tcx,$$
$$ii' : aa' :: R : \cos ycx,$$
$$aa' : cc' :: R : \cos tcz,$$

d'où l'on tire $\cos ycx : \cos tcx :: R : \cos tcz$.

Ce qui fait voir qu'on peut former un triangle sphérique rectangle avec les arcs de grand cercle qui mesurent les angles ycx, tcx, tcz.

Si les cercles fixes donnés se coupaient ou s'ils se touchaient, on placerait le point de vue à l'un des points d'intersection, ou au point de contact. Il est clair que dans ce cas les cônes qui ont pour bases les cercles donnés se changeraient en deux plans, et le tableau ou plan de projection présenterait un cercle variable constamment tangent à deux droites, et par conséquent coupé sous un angle constant par toute droite intermédiaire et concourante avec les deux autres, d'où l'on peut conclure que le théorème énoncé est vrai dans tous les cas.

On pourrait désirer une démonstration directe du théorème analogue pour des cercles placés sur un plan ; on y parviendra par des considérations semblables aux précédentes.

Ainsi étant donnés sur un plan deux cercles qui ne se coupent ni ne se touchent, on concevra sur ce plan la série que nous appellerons, par analogie, concourante, et dont les deux cercles donnés font partie. Elle se reconnaîtra à ce que les cercles de cette série auront leurs centres sur une même ligne droite, et qu'ils seront tous coupés orthogonalement par une seconde série de cercles. On prendra le cercle orthogonal dont le centre est sur la ligne des centres des cercles donnés, pour grand cercle d'une sphère de projection. Le point de vue sera le point le plus élevé de cette sphère par rapport au plan du tableau. Les projections sur la sphère formeront une série de cercles perpendiculaires à ce grand cercle. De plus ces projections auront un pôle commun, d'où il suit que le cercle variable les coupera sous des angles constans.

Pour le cas où les cercles donnés se couperaient, on on prendrait pour sphère de projection celle qui aurait pour diamètre la corde commune aux cercles donnés,

et les projections sur la sphère seraient une série de grands cercles passant par deux points fixes.

Enfin, pour le cas particulier où les cercles donnés se toucheraient, on pourrait recourir à deux projections successives.

PROBLÈMES.

On suppose que le quadrant soit donné, c'est-à-dire qu'on sache résoudre le problème suivant.

1.er PROBLÈME. *Décrire le grand cercle dont on connaît le pôle.*

2.e PROBLÈME. *Décrire le grand cercle passant par deux points donnés* A, B.

On trouvera le pôle de ce grand cercle au point d'intersection des grands cercles dont A, B, sont les pôles.

3.e PROBLÈME. *Elever une perpendiculaire sur un arc de grand cercle donné en un point donné* A.

Il suffira de prendre sur cet arc un point B placé à un quadrant de distance du point A, et de décrire le grand cercle qui a le point B pour pôle.

4.e PROBLÈME. *D'un point donné* A, *abaisser une perpendiculaire sur un arc donné.*

Il faut encore chercher sur cet arc donné le point B situé à un quadrant de distance du point A.

Les sept problèmes suivans ont des solutions analogues à celles des mêmes problèmes sur les figures planes.

5.e PROBLÈME. *Diviser un arc en deux parties égales.*

6.e PROBLÈME. *Diviser un angle en deux parties égales.*

7.e PROBLÈME. *Par trois points faire passer un cercle ou circonscrire un cercle à un triangle.*

8.e PROBLÈME. *Inscrire un cercle à un triangle.*

9.e PROBLÈME. *Faire un angle égal à un angle donné.*

10.e PROBLÈME. *Décrire le triangle dont on connaît les trois côtés.*

11.e PROBLÈME. *Décrire le triangle dont on connaît un angle et deux côtés.*

12.e PROBLÈME. *Décrire le triangle dont on connaît les trois angles.*

On formera d'abord le triangle pôlaire, et de celui-ci on passera facilement au triangle cherché en décrivant les grands cercles qui ont pour pôles les sommets du triangle pôlaire.

13.e PROBLÈME. *Décrire le triangle dont on connaît deux angles et un côté.*

Si le côté est adjacent aux deux angles, on pourra le faire directement.

Dans le cas contraire, on pourra employer le triangle pôlaire; ce qui ramène ce problème au problème 11.

On parvient encore à résoudre le problème de la manière suivante. Si l'on suppose qu'on ait décrit le grand cercle dont le côté inconnu adjacent aux deux angles est une portion, et que le pôle de ce grand cercle soit censé commun à un petit cercle passant par le sommet du triangle, dont le côté en question serait a base; il est évident que le rayon courbe de ce cercle est égal à la différence ou à la somme du quadrant et de la perpendiculaire abaissée du sommet du triangle sur la base. Or on peut facilement déterminer cette perpendiculaire et par conséquent le petit cercle, qui donnera le second côté adjacent à la base.

Ce problème comprend le suivant, qui se trouve par là résolu.

14.e PROBLÈME. *D'un point donné mener un arc de grand cercle qui fasse, avec un arc donné, un angle également donné.*

15.e PROBLÈME. *Par un point donné* A *mener un arc de grand cercle tangent à un cercle donné* B.

Si le point A est extérieur au cercle B, on décrira de ce point, comme pôle, un arc de grand cercle ; et du point B on décrira un arc de cercle d'un rayon égal au quadrant diminué ou augmenté du rayon du cercle B.

Le point de rencontre des deux arcs décrits sera le pôle de l'arc tangent demandé.

Si le point donné est sur la circonférence du cercle donné, on y élevera une perpendiculaire au rayon.

16.e PROBLÈME. *D'un point donné comme pôle, décrire un cercle tangent à un arc de grand cercle donné.*

On trouvera le rayon en abaissant une perpendiculaire sur l'arc donné. (*Prob.* 4.)

17.e PROBLÈME. *Mener une tangente à deux cercles donnés* A, B.

Des pôles A, B, et avec des rayons respectivement égaux à un quadrant diminué ou augmenté des rayons des mêmes cercles, on décrira des arcs qui se couperont en un point qui sera le pôle de la tangente cherchée.

On voit que ce problème a généralement quatre solutions, suivant qu'on ajoute ou qu'on retranche au quadrant ; deux solutions sont pour le contact unilatéral, et deux pour le contact alterne.

On s'y prendra d'une manière semblable pour décrire d'un rayon donné un cercle tangent à deux cercles donnés ; mais on obtiendra en général huit solutions.

18.e PROBLÈME. *Par deux points donnés* C, D (fig. 7), *mener un cercle tangent à un arc de grand cercle donné* RU.

On joindra CD pour un arc de grand cercle qu'on prolongera en R à la rencontre de RU.

La tangente RU au cercle cherché X étant égale à RT tangente de tout autre cercle CDIK, qui passe par les points C, D, on décrira ce cercle à volonté ; puis on lui menera sa tangente RT, on déterminera le point T

en abaissant une perpendiculaire du centre du cercle CDIK sur la tangente ; enfin on prendra RU = RT : le cercle mené par les trois points C, D, U, sera le cercle demandé.

Ce problème a deux solutions, suivant qu'on prend le point T de l'un ou de l'autre côté du point R.

19.e PROBLÈME. *Par deux points donnés* C, D, *faire passer un cercle* X *tangent à un cercle donné* A.

Par les deux points C, D, faisons d'abord passer à volonté un cercle CDIK qui coupe le cercle A en deux points I, M ; puis décrivons la ligne IM qui coupera la ligne CD en un point R ; menons RU tangente au cercle A. Le point U sera le point de contact du cercle cherché X. En effet, la tangente RU est égale à la tangente du cercle CDIK, et celle-ci à la tangente du cercle qui passerait par les trois points CDU ; donc ce dernier cercle est le cercle cherché.

Ce problème présente deux solutions ; l'une pour le contact externe, l'autre pour le contact interne.

20.e PROBLÈME. *Décrire un cercle qui passe par un point donné et qui soit tangent à deux arcs de grand cercle donnés.*

Si le point donné n'est pas sur la ligne qui divise en deux parties égales l'angle formé par les deux arcs donnés, on trouvera facilement un second point symétrique au premier par rapport à cette ligne, et qui sera également sur la circonférence demandée ; par là on remène ce problème au 18.e

Si le point donné est sur la ligne qui divise en deux parties égales l'angle formé par les arcs donnés, la perpendiculaire élevée sur cette ligne au point donné sera tangente au cercle demandé. On rentre par là dans le 8.e problème ; mais de plus, un des trois points de

contact étant donné, les autres s'en déduisent facilement.

21.e PROBLÈME. *Construire un cercle* X, *qui passe par un point donné* C, *et qui soit tangent à deux cercles donnés* A, B.

Nous commencerons par chercher le foyer des sécantes isogonales des deux cercles A, B.

Ce foyer se trouvera au point de rencontre des deux tangentes de ces deux cercles, lorsque ces deux cercles sont susceptibles d'être touchés à la fois par un même grand cercle ; mais dans tous les cas on l'obtiendra en décrivant un cercle quelconque MNIK, qui coupe les deux cercles donnés en M, N, et qui passe par les points I, K, d'intersection de ces cercles avec la ligne AB de leurs centres.

Nous avons vu (§ 12) que la ligne MN coupera la ligne AB au point F, qui sera le foyer des sécantes unilatérales, si les points I, K, sont opposés.

On aura le même résultat avec les deux autres points opposés I′, K′. Les points d'intersection étant alternés deux à deux, comme I et K′ ou I′ et K, donneront le le foyer des sécantes alternes.

Cela posé, nous remarquerons que le cercle mené par les points I, K, C, coupera le cercle tangent cherché en deux points C, D, placés sur la ligne CF (§ 14 et 5) ; donc le second point D se trouvera à l'intersection de CF avec le cercle IKC (1), et le problème se réduira au précédent.

(1) Au lieu de prendre les points IK pour décrire le cercle qui coupe FC aux deux points C, D, on peut choisir au besoin deux points plus favorables parmi ceux d'intersection d'une sécante menée à volonté à un quelconque des cercles qui passent par les points I, K.

Il est évident, que le point D est la seconde trace de la droite qui joint le point donné avec le sommet du cône qui passe par les deux cercles donnés, et que cette droite est dans le plan du cercle cherché.

En effet (§ 13 et 5), menons par les points C, D, un cercle X tangent au cercle A en un point U; si l'on fait passer un cercle par les points I, K, U, il coupera le cercle X en un point V placé sur la sécante FU, et par conséquent sur le cercle B. Donc le cercle X sera tangent aux deux cercles A, B.

Obs. 1.° Si le contact est interne, on prendra le point U de l'autre côté du cercle A.

2.° Si le contact est alterne, c'est-à-dire, interne pour l'un et externe pour l'autre, le point F sera entre A et B.

3.° Si les deux cercles donnés sont égaux, FC sera perpendiculaire au grand cercle mené à égale distance des deux cercles donnés et perpendiculairement à la ligne de leurs centres.

22.e PROBLÈME. *Construire un cercle qui passe par un point donné et qui soit tangent à un petit cercle et à un arc de grand cercle.*

Même solution que le précédent.

23.e PROBLÈME. *Décrire un cercle tangent à trois cercles donnés* A, B, C (1).

---

(1) Nous obtenons la solution de ce problème en supposant des opérations faites sur la surface même de la sphère. Nous allons voir qu'on peut y parvenir aussi au moyen de projections sur un plan.

D'après le §. 18 le plan du cercle tangent à trois cercles de la sphère passe généralement par une ligne droite qui contient les sommets de trois cônes dont les trois cercles donnés, pris deux à deux, sont les sections. D'où il suit que le plan mené par cette ligne droite et par la tangente à l'un des trois cercles sera le plan du cercle cherché.

Cela posé, si l'on prend pour plan de projection celui qui passe par les centres des plans des trois cercles donnés, ces trois centres et celui de la sphère formeront les sommets d'une pyramide triangulaire déterminée par rapport à ce plan. Les plans des cercles donnés étant perpendiculaires chacun sur une arête de la pyramide, seront également connus de position. De plus, les sommets des trois cônes seront facilement déterminés chacun

1.er *cas.* — *Contact externe.* Si des pôles des deux plus grands cercles A, B, donnés on décrit deux nouveaux cercles IUM, KYN avec des rayons égaux à ceux des premiers diminués du rayon du plus petit cercle C, le cercle CVU mené par le point C tangentiellement aux deux cercles décrits, aura le même pôle que le cercle cherché.

On trouvera le cercle CVU au moyen du problème précédent, et pour avoir le rayon du cercle cherché, il suffira de diminuer le rayon du cercle CVU d'une quantité égale au rayon du cercle C.

2.e *cas.* Si le contact est interne pour tous les cercles, il faudra faire le cercle CVU tangent intérieurement aux cercles décrits ci-dessus, et augmenter son rayon de celui du cercle C au lieu de l'en diminuer.

Les six autres cas se déduisent facilement de ceux-ci.

---

sur une face de la pyramide. Par conséquent il sera facile de trouver, sur le plan d'un quelconque des trois cercles donnés, la trace de la droite qui passe par le sommet des trois cônes. On menera de cette trace la tangente à ce cercle; le point de contact obtenu appartiendra au cercle tangent demandé.

On pourra simplifier la construction en prenant pour plan de projection celui des sommets des trois cônes droits tangens à la sphère suivant les trois cercles donnés. Car, d'après le §. 19, ce plan contiendra la droite qui passe par les sommets des trois cônes sécants.

On peut encore, au moyen de la projection stéréographique indiquée dans la note relative au §. 23, ramener ce problème au problème analogue pour le plan. C'est ce qu'a fait M. Dandelin dans un mémoire dont l'extrait vient de paraître dans le N.° 6 de la *Correspondance mathématique et physique*, publiée à Gand par MM. Garnier et Quetelet. La priorité de publication de cet extrait, et la connaissance que M. Dupin avait déjà traité la question plus générale du contact d'une section plane avec trois autres sections planes sur une surface du second degré, m'ont engagé à ajouter quelques nouveaux problèmes, et entr'autres le problème 30. Par suite j'ai été obligé d'augmenter le nombre des théorèmes, ce qui rend ce mémoire beaucoup plus volumineux qu'il n'était primitivement.

Quoique le nombre des solutions soit ordinairement de huit, ce nombre est réduit lorsqu'il y a des cercles qui se coupent ou qui se touchent.

La même solution s'applique aux deux problèmes suivans.

24.e PROBLÈME. *Construire un cercle tangent à deux cercles et à un arc de grand cercle donnés.*

25.e PROBLÈME. *Décrire un cercle tangent à un cercle et à deux arcs de grand cercle donnés.*

Le nombre des solutions n'est ici que de quatre, parce qu'il y a deux cercles qui se coupent nécessairement, ce qui empêche le contact alterne.

26.e PROBLÈME. *Par deux points donnés* I, K (fig. 8), *faire passer un cercle qui coupe un cercle donné, de manière à intercepter la moitié ou plus généralement une portion donnée de la circonférence entière de ce cercle.*

Quel que soit le cercle sécant mené par les deux points donnés, nous savons (§. 4) que la sécante commune aux deux cercles passe constamment par un point fixe S, situé sur la ligne des deux points donnés. Donc, pour trouver ce point fixe, il suffit d'un seul cercle sécant HIKL mené à volonté. Il sera facile ensuite de tirer de ce point la sécante qui coupe le cercle donné en deux parties égales ou en deux parties dont l'une soit égale à la portion donnée. Les deux points M, N, d'intersection de cette sécante seront sur la circonférence du cercle cherché.

27.e PROBLÈME. *Décrire un cercle tangent à deux cercles donnés, et coupant en deux parties égales la circonférence d'un troisième cercle donné.*

Le plan de tout cercle qui coupe la circonférence d'un autre cercle en deux parties égales passe par le centre du plan de ce second cercle. Par conséquent le plan du cercle cherché est assujetti à passer par la droite qui joint

ce centre et le sommet du cône dont les deux cercles donnés sont les sections. Donc si l'on peut trouver les traces de cette droite sur la sphère, ce problème se réduira au 21.e Or il est évident que les deux traces en question se trouvent aux points O, P, d'intersection du grand cercle FC, tiré par le foyer isogonal des deux premiers cercles et le pôle du troisième, avec le cercle IKNM coupant la circonférence du troisième cercle en deux parties égales, et passant par les deux points I, K, de contact d'un cercle quelconque avec les deux premiers cercles donnés.

28.e PROBLÈME. *Décrire un cercle qui coupe trois cercles donnés* A, B, C (fig. 9), *chacun en deux points diamétralement opposés.*

Si aux pôles A, B, de deux quelconques des cercles donnés on élève les diamètres EF, HI, perpendiculaires à la ligne qui joint ces pôles, les quatre points extrêmes de ces diamètres appartiendront à un même cercle. Les intersections O, P, de ce cercle avec la ligne des pôles seront les traces de la droite qui joint les centres des plans des cercles donnés ; et il est évident que tous les cercles qui passeront par ces deux traces couperont les deux mêmes cercles donnés chacun en deux points diamétralement opposés. Il sera donc facile (*probl.* 26) d'en mener un qui coupe le troisième cercle en deux points diamétralement opposés, ou qui satisfasse à d'autres conditions qu'il est inutile d'énumérer (1).

(1) La même propriété des points O, P, a lieu pour deux cercles placés sur un plan. On peut s'en assurer en remarquant que puisque l'on a AE moyenne proportionnelle entre OA et AP, si les points O, A, B, P, restent fixes et qu'on fasse varier le cercle LOKP qui passe par les deux points O, P, il est clair que la corde KL qui sera divisée en deux parties égales au point A, donnera AK moyenne proportionnelle entre OA et AP. D'où il suit que les points K, L, sont sur la circonférence du cercle A ; et de même pour le cercle B.

29.e PROBLÈME. *Décrire un cercle qui coupe deux cercles, donnés sous des angles donnés, et qui coupe un troisième cercle donné en deux points diamétralement opposés.*

Nous savons que le cercle variable qui coupe deux cercles fixes suivant des angles constans est assujetti à toucher deux autres cercles fixes P, Q. Nous obtiendrons ces deux derniers cercles en décrivant un seul cercle sécant d'un rayon pris à volonté, ce qui sera facile, puisque, le rayon étant déterminé, la distance du pôle du cercle sécant au pôle de chacun des cercles donnés est également déterminée.

Soit donc IVK (*fig.* 5) ce cercle sécant; il coupera (§. 3) les cercles concourans M, N, O, etc., de manière que les sécantes communes concourront en un point R; et la tangente RV, menée de ce point au cercle sécant, sera commune au cercle cherché Q. Donc le rayon XV du cercle sécant étant prolongé, coupera la ligne TU en un point Q qui sera le pôle du cercle cherché.

Opérant de même pour le cercle P, on réduira le problème au 27.e

30.e PROBLÈME. *Décrire un cercle qui coupe trois cercles donnés sous des angles également donnés.*

Tout cercle coupant deux des trois cercles donnés sous leurs angles respectifs est tangent à deux cercles dont les pôles sont sur la ligne des pôles des deux cercles donnés. Mais trois cercles peuvent être combinés deux à deux de trois manières différentes. Donc le cercle sécant demandé est tangent à six cercles, dont il nous suffira de déterminer trois pour résoudre le problème.

Si les trois angles donnés sont droits, la construction se simplifiera beaucoup, car les six cercles touchés se réduiront à six points, et le pôle du cercle demandé se trouvera à l'intersection des trois grands cercles dont les plans passent par les intersections de ceux des cercles donnés.

On obtiendra facilement ces grands cercles, car si les cercles donnés se coupent, les grands cercles passeront par leurs points d'intersection; si les cercles donnés sont tels qu'on puisse leur mener des doubles tangentes, les grands cercles cherchés passeront par les milieux de ces doubles tangentes; enfin, dans tous les cas, on pourra les trouver au moyen d'une des propriétés énoncées § 3, 15 et 17.

31.e PROBLÈME. *Par un point donné faire passer un cercle qui coupe trois cercles donnés sous des angles égaux.*

Nous trouverons un second point du cercle demandé en cherchant, de même qu'au problème 21, la seconde trace sur la sphère de la droite qui joint le point donné avec le sommet d'un quelconque des cônes qui passent par les cercles donnés pris deux à deux.

Pour que le problème soit possible, il faut que le point donné soit compris entre le cercle tangent intérieurement et le cercle tangent extérieurement aux trois cercles donnés.

Les angles donnés peuvent être supplémentaires au lieu d'être égaux.

32.e PROBLÈME. *Décrire un cercle qui coupe quatre cercles donnés, sous des angles égaux.*

Nous savons que le cercle qui coupe trois des cercles donnés, sous des angles égaux, est un cercle variable dont le plan passe constamment par la droite qui joint les sommets des cônes dont les trois cercles pris deux à deux sont des sections. Si cette droite coupe la sphère, les deux traces appartiendront au cercle cherché. Il sera facile d'obtenir ces deux traces lorsqu'elles existent; car elles se trouvent évidemment sur le cercle qui coupe orthogonalement les trois cercles donnés, et sur le grand cercle qui passe par les trois foyers des trois cercles pris deux à deux.

Mais dans tous les cas le grand cercle et le cercle orthogonal dont nous venons de parler, étant concourans avec le grand cercle demandé, le pôle de celui-ci sera sur le grand cercle qui passe par les pôles des deux autres.

Or les quatre cercles pris trois à trois offrent quatre combinaisons auxquelles répondent quatre grands cercles passant par le pôle du cercle cherché. Deux suffiront pour résoudre le problème.

La solution de ce problème s'applique au précédent, et permet de le varier en assujettissant le cercle cherché à d'autres conditions que de passer par un point donné. Enfin ce dernier se simplifiera considérablement si le point donné est sur la circonférence d'un des cercles donnés; car les foyers étant connus, on trouvera généralement cinq autres points du cercle demandé, en menant des sécantes isogonales successives aux trois cercles donnés combinés deux à deux.

Ce problème ainsi particularisé donne une solution très-simple pour le cercle tangent à trois autres (1). En effet, la série des cercles qui coupent les trois cercles donnés, sous des angles égaux, et les deux cercles tangens qui forment les limites de cette série, ont une intersection commune placée dans le plan du grand cercle qui passe par les trois foyers; d'où il suit que les plans de ces cercles coupent et touchent chacun des cercles donnés, de manière que les sécantes et tangentes communes sont concourantes en un point placé sur la ligne des foyers. Cela posé, on pourra facilement, par un point pris à volonté sur la circonférence d'un des cercles donnés, leur mener un cercle isogonal; puis, ayant tiré la sécante com-

(1) Sur le plan elle peut ordinairement s'exécuter avec la règle seule, comme on peut le voir dans l'ouvrage de M. Poncelet.

mune à ce cercle et à un des cercles donnés, il suffira, pour obtenir le point de contact de ce dernier cercle, de lui mener une tangente par le point de rencontre de la sécante et de la ligne des foyers.

On obtiendrait le même résultat en employant le cercle orthogonal qui se décrit suivant les procédés indiqués au problème 3e.

Appendice sur le contact et l'intersection des Sphères.

Ce qui précède étant bien compris, on s'assurera sans peine de la vérité des théorèmes suivans. Je me contenterai de les exposer brièvement, parce que le contact des sphères a déjà occupé les géomètres, et qu'il n'en est ici question que pour passer à une conséquence naturelle de la proposition 25 et de quelques autres du mémoire.

Une sphère variable, mais assujettie à passer par deux points fixes, touche une sphère fixe en une suite de points formant une circonférence de cercle. Le cône tangent à la sphère suivant ce cercle a son sommet sur la droite des deux points fixes, et il suffit d'un plan sécant mené à volonté par cette droite, pour déterminer la génératrice du cône.

Une sphère variable, mais assujettie à passer par trois points fixes, coupe une sphère fixe suivant une série de cercles dont les plans ont généralement une intersection commune placée dans le plan des trois points fixes. Car d'abord il est clair que la sphère passera constamment par le cercle déterminé par les trois points donnés. En second lieu, si par la droite d'intersection du plan de ce cercle avec celui d'un des cercles de la série donnée, on mène à volonté un plan sécant à la sphère, la section obtenue et le cercle des trois points donnés seront toujours antiparallèles.

Réciproquement étant donné une série de sphères qui aient une section commune, elles seront coupées individuellement par une sphère quelconque, de manière que leurs sections communes avec la sphère sécante concourront généralement en une droite variable, mais toujours située dans le plan de la section commune. Cette propriété subsiste lorsque les sphères de la série donnée se touchent en un seul point; et même lorsque ne se coupant ni ne se touchant pas, elles ont leurs centres en ligne droite, et sont toutes coupées orthogonalement par une seule sphère (1).

Une sphère variable tangente à deux sphères fixes les touche toujours, de manière que la droite menée par les points de contact est concourante avec elle-même. Car cette droite, toujours située dans un même plan avec les centres des trois sphères, fera des angles égaux avec les deux sphères fixes. C'est une sécante isogonale passant par un foyer facile à déterminer, ou parallèle à la droite qui joint les centres des sphères fixes. Réciproquement toute sécante isogonale située dans un même plan avec les centres des sphères fixes donne deux points de contact correspondans.

Deux paires de ces points de contact sont généralement sur une circonférence de cercle.

Il suit de là que, lorsque deux sphères tangentes à deux autres se coupent, le plan du cercle d'intersection passe

(1) Dans ce cas ces sphères peuvent, par analogie, s'appeler concourantes; et le plan qui est le lieu de concours des sections communes à la sphère indéterminée peut s'appeler section commune idéale ou imaginaire des sphères de la série, comme M. Poncelet appelle sécante idéale de deux cercles qui ne se coupent pas, la droite sur laquelle se rencontrent constamment les sécantes communes à ces deux cercles, et à un cercle sécant pris à volonté.

par le foyer des sections isogonales (1) des deux sphères touchées. Car tout cercle passant par la première paire de points de contact coupe tout cercle passant par la seconde, de manière que les deux points d'intersection et le foyer sont toujours en ligne droite.

Trois contacts d'une sphère variable tangente à deux sphères fixes déterminent six points placés généralement sur une même surface sphérique. Car ils sont sur trois circonférences de cercles qui se coupent deux à deux.

La sphère qui passe par cinq de ces six points passant, nécessairement par le sixième, il s'ensuit qu'une sphère quelconque, menée par deux paires de points de contact, coupe les deux sphères données suivant deux cercles qui se correspondent, de manière à former une suite de paires de points de contact, ou, ce qui revient au même, qui sont placés sur un cône dont le sommet se trouve au foyer des deux sphères.

Le foyer de deux quelconques des sphères tangentes à deux sphères fixes non concentriques, ou le sommet du cône qui enveloppe ces deux sphères tangentes, est constamment dans un plan fixe; et les deux plans tangens aux deux points de contact de chaque sphère tangente ont constamment leur intersection sur le même plan fixe. Ce plan est perpendiculaire à la droite qui joint les centres des sphères fixes (2).

Donc si le centre de la sphère variable tangente à deux sphères fixes est assujetti à parcourir un plan, le foyer de deux des sphères tangentes prises à volonté sera constamment sur une même ligne droite.

D'un rayon déterminé on peut ordinairement mener seize sphères tangentes à trois sphères données.

---

(1) Ou centre de similitude.

(2) C'est la section commune réelle ou idéale de ces deux sphères.

Une sphère variable touche trois sphères fixes, de manière que le plan mené par les trois points de contact est concourant avec lui-même, c'est-à-dire qu'il passe constamment par une droite fixe, ou qu'il est constamment parallèle à lui-même; car les droites menées par les trois points de contact pris deux à deux passent généralement par trois foyers placés dans le plan des centres des trois sphères fixes. Donc le plan des trois points de contact passe constamment par ces trois foyers lorsqu'ils existent, c'est-à-dire lorsque les trois sphères sont inégales.

Ceci nous fait voir que les trois foyers corrélatifs de trois sphères prises deux à deux sont généralement en ligne droite.

Si plusieurs sphères tangentes à trois sphères fixes se coupent entr'elles, leurs sections communes sont concourantes. Car elles passent par les trois foyers dont nous venons de parler. D'où il suit que ces sphères ont leurs centres dans un même plan, et qu'elles sont coupées orthogonalement par une série de sphères ayant leurs centres sur la même ligne droite que les trois foyers.

Deux contacts de la sphère variable tangente à trois sphères fixes déterminent six points par lesquels on peut généralement faire passer une sphère.

Le foyer de deux quelconques des sphères tangentes à trois sphères fixes est toujours sur une même ligne droite. En effet, ces trois sphères fixes étant prises deux à deux, les foyers des sphères tangentes se trouvent sur trois plans perpendiculaires aux trois droites qui joignent deux à deux les centres des sphères fixes. Donc le foyer de deux quelconques des sphères tangentes aux trois sphères fixes est sur ces trois plans qui, par conséquent, ont une intersection commune.

Il suit de là que la ligne droite qui joint deux des

points de contact appartenant à une seule sphère fixe est constamment dans un même plan passant par l'intersection commune dont nous venons de parler. *Donc les lieux des points de contact sur les trois sphères fixes sont trois cercles* (1) *dont les plans ont une commune intersection, et qui, de plus, sont antiparallèles chacun à chacun.*

Les cônes qui touchent les trois sphères suivant ces trois cercles ont leurs sommets sur la droite qui passe par les foyers des trois sphères prises deux à deux.

Trois sphères fixes étant données, nous savons qu'elles sont touchées par une sphère variable suivant des cercles qui ont une intersection commune. Réciproquement si nous choisissons trois des sphères tangentes pour sphères fixes, elles seront touchées par une série de sphères dont les trois sphères données feront partie. Cela posé, si nous prenons de nouveau deux des sphères données et une autre sphère quelconque de la même série, cette sphère nouvelle ayant, ainsi que les deux sphères données, trois points de contact avec les trois sphères choisies, le cercle qui passe par ces trois points sera celui de contact de la sphère variable qui toucherait en même temps les deux sphères données. Mais les cercles de contact des sphères données ne changent pas puisqu'ils passent

(1) On peut encore prouver, comme il suit, que ce sont des cercles : Trois contacts de la sphère variable donnent trois points sur chacune des trois sphères. Le cercle qui passe par ces trois points correspond avec chacun des deux autres cercles pareils, de manière à former avec lui une suite de paires de points de contact ; et les points des trois cercles correspondent trois à trois à un contact de la sphère variable. De plus, ces cercles jouissent seuls de cette propriété ; car ils divisent chaque sphère en deux parties, de telle sorte que les points d'une des parties de la première sphère correspondent à ceux d'une des parties de chacune des autres sphères, mais que ces deux dernières parties ne se correspondent pas entr'elles.

par trois points fixes. *Donc, la sphère variable qui touche trois sphères fixes, en touche une infinité d'autres formant avec les trois premières une série dont les sections communes sont concourantes.*

L'axe ou la droite de concours des sections communes appartient aussi aux plans de tous les cercles de contact, et contient les foyers des sphères tangentes prises deux à deux.

Réciproquement la sphère variable donne une série de sphères touchées par la première série suivant une suite de cercles dont les plans concourent en une droite qui contient les foyers des sphères de la première série, prises deux à deux (1).

Les théorèmes qui précèdent sont plus que suffisans pour résoudre le problème de la sphère tangente à quatre autres. M. Hachette se trompe lorsqu'il dit que le nombre ordinaire des solutions est de trente-deux (2). Il n'est que de seize, ainsi que je vais le prouver.

D'abord les centres des sphères touchées n'étant pas dans un même plan, on pourra les regarder comme les sommets d'un tétraèdre. Les foyers tant internes qu'externes des quatre sphères prises deux à deux seront au nombre de six dans le plan de chaque face du tétraèdre; et ils y seront distribués trois à trois sur quatre droites. Mais chaque foyer étant commun à deux faces, le nombre total des foyers n'est que de douze.

En second lieu, quelle que soit l'espèce de contact de la sphère tangente aux quatre sphères données, les six foyers qui correspondent aux quatre points de contact pris deux à deux, seront toujours dans un même plan.

---

(1) Ces résultats sont indiqués par M. Dupin dans la correspondance sur l'école polytechnique, tome 2, N.° 5, page 420.

(2) Corresp. sur l'école polytechnique, tome 1.er, N.° 2, page 98.

En effet, les trois foyers relatifs à trois des quatre sphères appartiennent à une même ligne droite, placée dans une des faces du tétraèdre; et comme les combinaisons trois à trois des quatre sphères données ont l'une avec l'autre deux sphères communes, les six foyers corrélatifs seront aux points d'intersection de quatre droites situées chacune dans une des faces du tétraèdre. Ils seront donc aux points d'intersection des six arêtes du tétraèdre avec un même plan que nous pourrons appeler *plan focal*.

Maintenant nous allons prouver qu'il ne peut y avoir que huit plans pareils. Si l'on ne considère que les six foyers internes et externes d'une des faces du tétraèdre, un quelconque de ces six foyers est sur deux droites dont chacune passe par deux autres foyers. Or le premier foyer est commun à une autre face du tétraèdre, et il est également à l'intersection de deux des quatre droites qui s'y trouvent. Combinant les deux droites de la première face avec les deux droites de la seconde, on obtient quatre plans dont chacun passant par cinq des foyers corrélatifs d'un même contact doit contenir le sixième. Ainsi par chacun des six foyers de la première face il ne passe que quatre plans focaux. Mais chacun de ces plans est commun à trois foyers de la même face. Donc leur nombre total n'est que de huit.

Il est facile de prouver que chacun de ces huit plans ne peut répondre à plus de deux contacts. En effet, la sphère variable tangente à trois des quatre sphères données touche chacune de ces sphères données suivant un cercle. Or si l'on forme une seconde combinaison avec les quatre sphères prises trois à trois, on obtiendra d'autres cercles de contact; et comme les deux combinaisons ont deux sphères communes, il est évident que si les deux cercles de chacune d'elles se coupent, les deux points d'intersection

seront les seuls points de contact possibles pour chacune de ces sphères, relativement aux foyers que nous avons choisis. Mais dès que les foyers sont donnés, un point de contact détermine les trois autres de la sphère tangente. Donc chaque plan focal ne peut répondre à plus de deux sphères tangentes aux quatre sphères données.

Pour que les deux cercles de contact n'aient aucun point commun, ou qu'ils n'en aient qu'un seul, il faut que le sommet d'un des cônes tangens suivant ces cercles soit intérieur à l'autre cône, ou qu'il soit sur la surface de celui-ci. Or ces sommets sont dans le plan focal relatif à l'espèce de contact demandée. Donc ce plan coupe les quatre sphères données, ce qui n'est pas le cas ordinaire; de plus, il y a d'autres conditions qu'il est inutile d'examiner (1).

On voit d'ailleurs que l'espèce de contact des trois premières sphères étant déterminée, le contact est impossible pour la quatrième sphère lorsque celle-ci est renfermée dans une des sphères de la série qui comprend les trois premières, et dont les sections communes sont concourantes. Le contact est également impossible lorsque la quatrième sphère, au lieu d'être renfermée, renferme au contraire celle dont nous venons de parler. Lorsque la quatrième sphère touche intérieurement une des sphères de la série, sans être renfermée en entier dans aucune des autres, il n'y a qu'un contact. Enfin on arrivera à une position de la sphère qui fournira quatre contacts. Or il n'y a que quatre espèces de contact pour les trois

(1) Nous remarquerons seulement que le plan focal coupe les quatre sphères proportionnellement, et que, pour qu'il ne corresponde qu'à une sphère tangente, il faut qu'il passe par les quatre points de contact, et qu'il coupe les quatre sphères suivant quatre cercles susceptibles d'être touchés par un seul.

premières sphères ; chaque espèce étant indiquée par une des quatre droites qui contiennent trois foyers, et donnant naissance à une série différente : ce qui montre de nouveau que le nombre ordinaire des contacts est de seize.

Si une des sphères se réduit à un point, il n'y a plus que huit solutions et quatre plans focaux. Si deux sphères se réduisent à des points, il ne reste que quatre solutions ; enfin, pour trois points et une sphère il n'y a que deux solutions.

La sphère variable assujettie à couper deux sphères fixes suivant leurs grands cercles, passe par deux points fixes placés sur la ligne des centres des sphères fixes. Ce théorème nous apprend à *mener une sphère qui coupe quatre sphères données suivant leurs grands cercles.*

La sphère variable assujettie à couper deux sphères fixes sous des angles constans est tangente à deux autres sphères fixes dont les centres sont sur la ligne des centres des sphères coupées. Ce théorème conduit à la résolution du problème suivant : *Mener une sphère qui coupe quatre sphères données sous des angles également donnés.* On voit que la sphère demandée est tangente à douze sphères dont il suffira de choisir quatre pour résoudre le problème.

Si une sphère variable coupe trois sphères fixes sous des angles égaux (1), *mais indéterminés* (2), *son centre est constamment dans un même plan.* En effet, les trois cercles

(1) Un des angles peut être supplémentaire des autres.

(2) Si l'on donne aux angles d'intersection une grandeur déterminée, la sphère variable touchera constamment quatre sphères fixes dont les centres seront dans un même plan. Son centre parcourra donc une section conique commune aux quatre cônes droits qui passent par ces cercles et qui ont leurs sommets aux centres des sphères touchées. La même chose a lieu pour le cas particulier d'une sphère tangente à trois autres.

Cette section conique est commune, non-seulement aux quatre cônes dont nous avons parlé, mais encore à une infinité d'autres qui ont leurs

d'intersection seront deux à deux sur trois cônes qui auront leurs sommets aux foyers correspondans des trois sphères fixes prises deux à deux. Ces trois foyers étant sur une même ligne droite, si par cette droite on mène à volonté un plan sécant aux quatre sphères et aux trois cônes, la circonférence de la section faite dans la sphère variable coupera, sous des angles égaux, les circonférences des sections faites dans les trois sphères fixes. Réciproquement, d'après ce que nous avons vu plus haut, toutes les sphères qui passeront par ce cercle sécant couperont les trois sphères sous des angles égaux. D'où l'on peut conclure que les sphères qui coupent sous des angles égaux les trois sphères données, ont leurs centres dans un même plan (3).

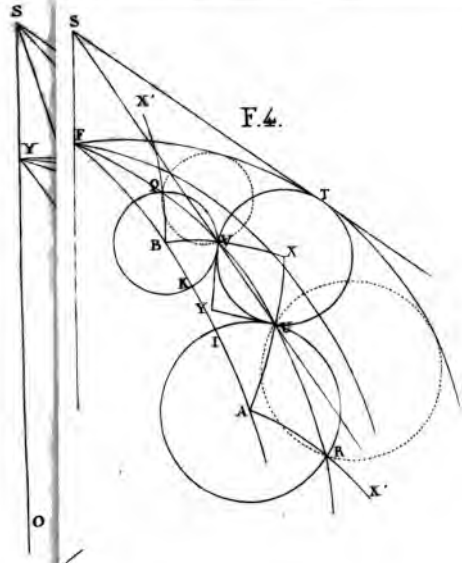
Si une sphère variable coupe quatre sphères données sous des angles égaux, mais variables simultanément, son centre parcourt une ligne droite. Ce théorème nous donne la solution du problème suivant : *Mener une sphère qui en coupe cinq autres sous des angles égaux.*

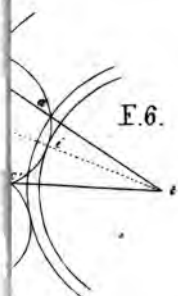
Lorsque quatre sphères se coupent réciproquement, les six plans d'intersection passent par un point unique, et lorsqu'elles se coupent à angle droit, le plan d'intersection de deux quelconques de ces sphères passe par les centres des deux autres.

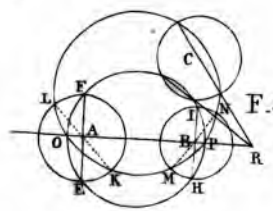
---

sommets aux centres des sphères touchées par la sphère variable. D'après ce que nous venons de dire il est clair que ces centres forment une seconde section conique dont le plan est perpendiculaire au plan de la première ; que le foyer de l'une des sections coniques sert de sommet à l'autre, etc.

(3) L'espace occupé par ces centres peut être renfermé entre les côtés d'un angle, à moins qu'on ne considère deux sphères qui ne se coupent pas, comme formant des angles imaginaires. D'après cette manière de voir, la suite des cercles qui coupent trois cercles fixes sous des angles égaux ne sera plus limitée par les deux cercles tangens ; ils formeront une série concentrique complète. Cette remarque s'applique également au théorème suivant.







F

P. Doyen

Sculp.